Exercice 1: (5,5 points)

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace (E).
On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives:
A(-1 ; 2 ; 1) B(1 ; -6 ; -1) C(2 ; 2 ; 2) I(0 ; 1 ; -1).

1) a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) contenant les trois points A, B et C.
c) Déduire que les points I, A, B et C ne sont pas coplanaires
d) Déterminer le volume du tétraèdre IABC

2) Soit (Q) le plan d'équation : $x + y - 3z + 2 = 0$ et (Q') le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$.
a) Pourquoi les plans (Q) et (Q') sont-ils sécants ?
b) Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (D) des plans (Q) et (Q').
3) Donner une équation cartésienne de la sphère (S) de centre I et de rayon 2.
4) Montrer que (D) coupe (S).

Exercice 2: (5,5 points)

On se propose de résoudre l'équation différentielle : (E): $y'-2y = x e^x$.
1) On admet qu'il existe une fonction unique f_0 solution de (E) vérifiant $f_0(0)=1$.
Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de f_0 en son point d'abscisse 0.
2) On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$, donner les fonctions solutions de (E_0).
3) Soient a et b deux réels et soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (ax+b)e^x$.
a- Déterminer le couple (a, b) tel que f soit solution de (E).
b- Montrer que g est solution de (E) si seulement si g - f est solution de (E_0).
c- En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4) Déterminer la solution g_0 de l'équation (E) qui prend 1 en 0.

Exercice 3: (3points)

Un patineur participe à une compétition. Il ne réussit le premier saut que dans 95% des cas.
Comme il est émotif, s'il ne réussit pas ce premier saut, il rate le deuxième 3 fois sur 10;
sinon, si tout va bien au premier saut, il réussit le deuxième dans 90% des cas.
Soit R1 l'événement : "le patineur réussit le premier saut ".
Soit R2 l'événement : "le patineur réussit le deuxième saut".
1) Etablir un arbre de choix
2) Déterminer la probabilité de l'événement : "le patineur réussit les deux sauts".
3) a) Calculer la probabilité de l'événement R2.
b) Un spectateur, arrivé en retard, voit le patineur réussir le deuxième saut.
Calculer la probabilité qu'il ait aussi réussi le premier saut.

Exercice 4: (6 points)

1) On considère l'équation (E):$6x +7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs
a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u ; v) tel que $6u +7v=1$
b) En déduire une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E)
c) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E)
2) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace (E).
On considère les points du plan P: $6x + 7y + 8z = 57$ qui appartiennent aussi au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels.
b) Déterminer les coordonnées de ce point.

T.S.V.P

3) On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.
a) Montrer que l'entier y est impair.
b) On pose $y=2p+1$ où p est un entier naturel.
Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.
c) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.
- Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$
- En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1

d) En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

<u>Exercice 3:</u> (3points)

Un patineur participe à une compétition. Deux de ses saut l'inquiètent.
Il ne réussit le premier saut que dans 95% des cas. Comme il est émotif, s'il ne réussit pas ce premier saut, il rate le deuxième 3 fois sur 10; sinon, si tout va bien au premier saut, il réussit le deuxième dans 90% des cas.
On notera $\overline{A}$ l'événement contraire d'un événement A.
Soit R1 l'événement : "le patineur réussit le premier saut ".
Soit R2 l'événement : "le patineur réussit le deuxième saut".

1) Calculez la probabilité de l'événement R1.
2) Déterminez la probabilité de l'événement : "le patineur réussit les deux sauts".
3) a) Calculez la probabilité de l'événement R2.
b) Un spectateur, arrivé en retard, voit le patineur réussir le deuxième saut.
Calculez la probabilité qu'il ait aussi réussi le premier saut.

Exercice :

.On considère la suite (u) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6; \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n$ (modulo 4).
En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2$ (modulo 4) et $u_{2k+1} \equiv 0$ (modulo 4).
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2}+3$.
En déduire, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28$ (modulo100).

3) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n

4) Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 1:Q.C.M (3points)

Il peut y avoir plusieurs propositions exactes.
On considère les équations différentielles :
(E_1) : $y'-2y = 0$ et (E_2) : $y' - 2y = 2e^{2x}$ où y est une fonction dérivable sur IR.

1) Si f et g sont deux fonctions non nulles qui sont solutions de (E_1)
a) f = g ; b) il existe un réel k tel que f = kg ; c) g est une solution de (E_1)

2) Si f est une solution de (E_1) telle que f (0) = 0, alors :
a) il existe un réel c tel que f : $x \rightarrow ce^{-2x}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;
c) la fonction $x \rightarrow f(x) + 2e^{2x}$ est une solution de (E_2)
3) Si f et g deux fonctions de (E2)
a)il existe un réel k tel que g : $x \rightarrow f(x) + ke^{2x}$; b) f - g est une solution de (E_2)
c) la dérivée de g : $x \rightarrow f(x)\, e^{-2x}$ est une fonction constante.